LÓGICA FORMAL
TEORIAS DE PRIMER ORDEN

Teoremas

Pedro López

Departamento de Inteligencia Artificial
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Fórmulas elementales

- Teniendo en cuenta las definiciones:
  - ◇ $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$
  - ◇ $A \to B \equiv \neg A \vee B$
  - ◇ $A \leftrightarrow B \equiv \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A))$
  - ◇ $\forall x\ A \equiv \neg \exists x\ \neg A$

  sólo hacen falta: "$\neg$", "$\vee$" y "$\exists$".
- Sea una T una teoría de primer orden.
- Una fórmula A de $L(T)$ es elemental sii:
  - ◇ Es una fórmula atómica, o
  - ◇ es de la forma $\exists x B$, donde B es cualquier fórmula de $L(T)$.
- Nota: en lógica proposicional, los símbolos de proposición son las fórmulas elementales.

Valoraciones

- Una valoración para T es un aplicación, v, tal que a toda fórmula A de $L(T)$ le hace corresponder un valor (V ó F) denotado $v(A)$.
- $v(A)$ se define de la forma siguiente:
  - ◇ Si A es una fórmula elemental, $v(A)$ se fija arbitrariamente.
  - ◇ Si A es una fórmula no elemental (tiene que ser $\neg B$, ó $B \vee C$): tablas de verdad de las conectivas.

$v(B)$	$v(C)$	$v(\neg B)$	$v(B \vee C)$
V	V	F	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

- Una valoración no es una estructura.

Consecuencia tautológica y Teorema de tautología

- Una fórmula B es consecuencia tautológica de las fórmulas $A_1, \ldots, A_n$ sii para toda valoración v tal que $v(A_1) = \cdots = v(A_n) = V$ se cumple que $v(B) = V$.
- Una fórmula B es tautología sii es consecuencia tautológica del conjunto vacío de fórmulas, es decir, sii para toda valoración v se cumple que $v(B) = V$.
- Teorema de tautología:
  - ◇ (1^a forma, Post) Para toda teoría de primer orden T:
    Si B es consecuencia tautológica de $A_1, \ldots, A_n$ y $T \vdash A_1, \ldots, T \vdash A_n$ entonces $T \vdash B$.
    (si B es consecuencia tautológica de teoremas, entonces B es teorema).
  - ◇ (2^a forma) Si B es tautología, entonces $T \vdash B$.

Otra definición de teorema

- El teorema de Tautología se puede utilizar para reemplazar aplicaciones de axiomas proposicionales y las reglas de expansión, contracción, asociativa y de corte.
- Dicho de otra forma, podemos dar una definición inductiva de los teoremas de una teoría T, de la forma siguiente:
  - $(\mathbf{a})$ Todo axioma de sustitución, identidad, igualdad o no lógico es un teorema de T.
  - $(\mathbf{b})$ Si $A_1, \dots, A_n$ $(n \geq 0)$ son teoremas de T y B es consecuencia tautológica de $A_1, \dots, A_n$ entonces B es teorema de T.
  - $(\mathbf{c})$ Si A es un teorema de T y B se puede inferir de A por la regla de introducción del $\exists$, entonces B es teorema de T.
  - $(\mathbf{d})$ Sólo son teoremas las fórmulas definidas por (a), (b) o (c).

Reglas de definición de conectivas y cuantificadores

Para toda teoría de primer orden T:

- Definición de $\wedge$:
  Si $T \vdash A \wedge B$ entonces $T \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$
- Definición de $\rightarrow$:
  Si $T \vdash A \rightarrow B$ entonces $T \vdash \neg A \vee B$
- Definición de $\leftrightarrow$:
  Si $T \vdash A \leftrightarrow B$ entonces $T \vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
  Si $T \vdash A \leftrightarrow B$ entonces $T \vdash \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A))$
- Definición de $\forall$:
  Si $T \vdash \forall x\ A$ entonces $T \vdash \neg\exists x\ \neg A$

Reglas de inferencia derivadas

Para toda teoría de primer orden T:

- Regla Conmutativa: Si $T \vdash A \vee B$ entonces $T \vdash B \vee A$
- Regla Modus Ponens: Si $T \vdash A$ y $T \vdash A \rightarrow B$ entonces $T \vdash B$
- Regla del Producto: Si $T \vdash A$ y $T \vdash B$ entonces $T \vdash A \wedge B$
- Regla de Simplificación:
  Si $T \vdash A \wedge B$ entonces $T \vdash A$ (y también $T \vdash B$)
- Regla de Doble Negación:
  Si $T \vdash \neg\neg A$ entonces $T \vdash A$
  Si $T \vdash A$ entonces $T \vdash \neg\neg A$
- Regla Distributiva:
  Si $T \vdash A \vee (B \wedge C)$ entonces $T \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
  Si $T \vdash A \wedge (B \vee C)$ entonces $T \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Otras reglas de inferencia derivadas

Para toda teoría de primer orden T:

- Regla de Contraposición:
  Si $T \vdash A \rightarrow B$ entonces $T \vdash \neg B \rightarrow \neg A$
- Regla de Silogismo:
  Si $T \vdash A \rightarrow B$ y $T \vdash B \rightarrow C$ entonces $T \vdash A \rightarrow C$
- Regla de Modus Tollens:
  Si $T \vdash A \rightarrow B$ y $T \vdash \neg B$ entonces $T \vdash \neg A$
- Regla de Casos:
  Si $T \vdash A \vee B$ y $T \vdash A \rightarrow C$ y $T \vdash B \rightarrow C$ entonces $T \vdash C$
- Regla de Reducción al Absurdo:
  Si $T \vdash A \rightarrow C$ y $T \vdash A \rightarrow \neg C$ entonces $T \vdash \neg A$

Teorema de Introdución del Cuantificador Universal

- Para toda teoría de primer orden T:
  Si $T \vdash A \rightarrow B$ y x no está libre en A entonces $T \vdash A \rightarrow \forall x\ B$
- Demostración:

1. $T \vdash A \rightarrow B$	Hipótesis.
2. $T \vdash \neg B \rightarrow \neg A$	Consecuencia tautológica de 1 (o R. Contraposición en 1).
3. $T \vdash \exists x\ \neg B \rightarrow \neg A$	Regla de introducción del $\exists$ en 2.
4. $T \vdash A \rightarrow \neg \exists x\ \neg B$	Consecuencia tautológica de 3.
5. $T \vdash A \rightarrow \forall x\ B$	Definición de $\forall$ en 4.

Regla de Generalización

- Para toda teoría de primer orden T:
  Si $T \vdash A$ entonces $T \vdash \forall x\ A$
- Demostración:

1. $T \vdash A$	Hipótesis.
2. $T \vdash \neg\neg \forall x\ A \vee A$	R. de Expansión en 1. (o consecuencia tautológica de 1).
3. $T \vdash \neg \forall x\ A \rightarrow A$	R. Definición de $\rightarrow$ en 2.
4. $T \vdash \neg \forall x\ A \rightarrow \forall x\ A$	Regla de introducción del $\forall$ en 3.
5. $T \vdash \neg\neg \forall x\ A \vee \forall x\ A$	R. Definición de $\rightarrow$ en 4.
6. $T \vdash \forall x\ A \vee \forall x\ A$	R. Doble negación en 5.
7. $T \vdash \forall x\ A$	R. de Contracción en 6.

Regla de sustitución

- Para toda teoría de primer orden T:
  Si $T \vdash A$ y A' es una instancia de A entonces $T \vdash A'$
- Recordatorio: una instancia de A' se obtiene sustituyendo todas las ocurrencias libres de alguna(s) o todas las variables de A por términos cualesquiera.

Regla de sustitución: demostración

- Demostración:
  1^{er} caso: Si A' es $A_x[a]$ (se sustituyen todas las ocurrencias libres de una variable, x, en este caso, por un término cualquiera a).

$1.\ T \vdash A$	Hipótesis.
$2.\ T \vdash \forall x\ A$	Regla de generalización 1.
$3.\ T \vdash \neg \exists x\ \neg A$	Definición de $\forall$ en 2.
$4.\ T \vdash \neg A_x[a] \rightarrow \exists x\ \neg A$	Axioma de sustitucion.
$5.\ T \vdash \neg\neg\ A_x[a]$	R. Modus Tollens de 3 y 4.
$6.\ T \vdash A_x[a]$	R. Doble negación de 5.

Regla de sustitución: demostración (cont.)

- 2^o caso: Si A' es $A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ (sust. simultáneas)
- Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ variables que no aparecen en A ni en A'. Aplicando la primera parte n veces llegamos a $T \vdash A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[y_1, y_2, \ldots, y_n]$
- Volviéndola a aplicar n veces en la forma:
  Si $T \vdash A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ entonces
  $T \vdash (A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[y_1, y_2, \ldots, y_n])_{y_1}[a_1]$,
  y escribiendo ésta última fórmula como:
  $T \vdash A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[a_1, y_2, \ldots, y_n]$,
  se llega a:
  $T \vdash A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[a_1, a_2, \ldots, y_n]$
  $\vdots$
  $T \vdash A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[a_1, a_2, \ldots, a_n]$

Teorema de sustitución

(a) $T \vdash A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[a_1, a_2, \ldots, a_n] \rightarrow \exists x_1 \, \exists x_2 \, \cdots \exists x_n \, A$

(b) $T \vdash \forall x_1 \, \forall x_2 \, \cdots \forall x_n \, A \rightarrow A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[a_1, a_2, \ldots, a_n]$

Regla de distribución

- Para toda teoría de primer orden T:
  Si $T \vdash A \to B$ entonces $T \vdash \exists x\ A \to \exists x\ B$ y
  $T \vdash \forall x\ A \to \forall x\ B$

Teorema del Cierre

- Definición: A' es el cierre de A si A' tiene la forma:
  $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A$ donde $x_1, x_2 \cdots x_n$ son todas las variables libres de A en orden alfabético.
- Teorema del cierre: $T \vdash A$ si y sólo si $T \vdash A'$.
- Demostración:

(a) 1. $T \vdash A$	Hipótesis.
2. $T \vdash A'$	Regla de generalización 1 (aplicada n veces).
(b) 1. $T \vdash A'$	Hipótesis.
2. $T \vdash A' \to A$	Teorema de sustitución.
3. $T \vdash A$	R. Modus Ponens de 1 y 2 (o consecuencia tautológica de 1 y 2).

- Corolario del teorema del cierre: A es válida en una estructura M si y sólo si A' es válida en M.

El Teorema de la Deducción

- **Teorema de la Deducción**
  Para toda teoría de primer orden T:
  Si A es una fórmula cerrada, y B una fórmula cualquiera entonces:

$$T \vdash A \rightarrow B \text{ si y sólo si } T[A] \vdash B$$

- Corolario del Teorema de la Deducción:
  Sean $A_1, \ldots, A_n$ fórmulas cerradas de T.
  Entonces, para toda fórmula B de T:
  $T \vdash A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n \rightarrow B$ si y sólo si $T[A_1, \ldots, A_n] \vdash B$

Teorema sobre constantes

- Sea T una teoría de primer orden. Sea T' otra teoría de primer orden obtenida de T por la adición de nuevas constantes, pero no nuevos axiomas. Para toda fórmula A de T y todo conjunto de constantes nuevas distintas $e_1, e_2, \ldots, e_n$ se cumple que:

$$T \vdash A \text{ si y sólo si } T' \vdash A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[e_1, e_2, \ldots, e_n]$$

- Demostración (sólo si):

$1.\ T \vdash A$	Hipótesis.
$2.\ T' \vdash A$	Monotonía.
$3.\ T' \vdash A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[e_1, e_2, \ldots, e_n]$	Regla de sustitución en 2.

Teorema sobre constantes (cont.): demostración (si)

- Si $T' \vdash A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[e_1, e_2, \ldots, e_n]$, tomemos una demostración D de $A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[e_1, e_2, \ldots, e_n]$ en T'.
- Elijamos n variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ que no figuren en D, y sustituyamos en D las constantes $e_1, e_2, \ldots, e_n$ por las variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$.
- Los axiomas no lógicos no son afectados por este cambio, por hipótesis, y los axiomas lógicos, y las aplicaciones de reglas lógicas que aparecen en D, se convierten en axiomas lógicos del mismo tipo, y en aplicaciones de las mismas reglas lógicas.
- Por tanto, la nueva demostración prueba: $T \vdash A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[y_1, y_2, \ldots, y_n]$
- Aplicando ahora la regla de sustitución obtenemos: $T \vdash A$.

Teorema de equivalencia

- Sea A' la fórmula obtenida de A reemplazando ciertas $B_1, B_2, \ldots, B_n$ por, respectivamente, $B'_1, B'_2, \ldots, B'_n$

  Si
  $T \vdash B_1 \leftrightarrow B'_1$
  $T \vdash B_2 \leftrightarrow B'_2$
  $\vdots$
  $T \vdash B_n \leftrightarrow B_n$
  entonces
  $T \vdash A \leftrightarrow A'$

Teorema de la variante y Teorema de simetría

- Teorema de la variante:

  Si A' es una variante de A entonces $T \vdash A \leftrightarrow A'$

- Teorema de simetría:

  $T \vdash a = b \leftrightarrow b = a$

Teorema de la Reducción

- Teorema de la reducción:
  - ◇ Sea Γ un conjunto de n fórmulas de la teoría de primer orden T, y
  - ◇ sea A una fórmula de $L(T)$.

  Entonces:

  A es un teorema de $T[\Gamma]$ si y sólo si en T hay un teorema de la forma

  $$B_1 \to B_2 \to \cdots \to B_n \to A$$

  donde cada B_i es el cierre una fórmula de Γ

Teoría Inconsistente: Definición

- Una teoría T es inconsistente si y sólo para toda fórmula A de T se cumple que $T \vdash A$.
- Otras condiciones equivalentes:
  - ◇ Una teoría T es inconsistente si y sólo si existe una fórmula B tal que simultáneamente $T \vdash B$ y $T \vdash \neg B$
  - ◇ Una teoría T es inconsistente si y sólo si no tiene ningún modelo.

Teorema de Reducción para Consistencia

- Sea Γ un conjunto no vacío de fórmulas de la teoría de primer orden T.
- $T[\Gamma]$ es inconsistente si y sólo si en T hay un teorema de la forma: $\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \cdots \vee \neg B_n$
  donde cada B_i es el cierre de una fórmula B_i^o de Γ, y todas las fórmulas B_i^o son distintas entre sí.
- Corolario del Teorema de Reducción para Consistencia
  Sea A el cierre de A^o. Entonces:
  $T \vdash A^o$ si y sólo si $T[\neg A]$ es inconsistente.