EJERCICIOS DE EXAMEN DE LÓGICA FORMAL
con algunas soluciones

CURSO 2005-2006

Febrero

1.
(i) Dada la fórmula

$x=x$

Contéstese a las siguientes preguntas justificando brevemente las respuestas en los espacios reservados a cada una.

(a) ¿Es una fórmula elemental?

Sí. Las fórmulas elementales son las atómicas y las de la forma $\exists xA$ y ésta (=xx) es atómica

(b) ¿Es una tautología?

No. Las valoraciones se definen arbitrariamente sobre las fórmula elementales, por tanto, puede haber una v tal que v(x=x) sea F

(c) ¿Es un teorema de alguna teoría de primer orden?

Si. Porque es el axioma lógico de identidad, es axioma de cualquier teoría y, por tanto, teorema.

(ii) Demuéstrese el teorema del cierre, si A' es el cierre de A, entonces $T \vdash A$ si y sólo si $T \vdash A'$.

***Demostración**.*

(a)	$T \vdash A$	*Hipótesis*
	$T \vdash A'$	*Regla de generalización aplicada tantas veces cuantas variables libres tenga A*
(b)	$T \vdash A' \rightarrow A$	*Teorema de substitución*
	$T \vdash A'$	*Hipótesis*
	$T \vdash A$	*Modus ponens de las dos anteriores*

2. Para el lenguaje de primer orden L, cuyos símbolos no lógicos son los símbolos de constante a, el predicado unoario C y D así como el binario B, encuentre una demostración para:

$T[A_1, A_2, A_3] \vdash \exists x C(x)$

siendo las fórmulas A_1, A_2 y A_3:

A_1: $\forall x(D(x) \rightarrow B(x,a))$

A_2: $\forall x(\neg C(x) \rightarrow \neg B(x,x))$

A_3: $D(a)$

Solución:

(1) $\forall x\ (D(x) \rightarrow B(x,a))$	premisa o axioma
(2) $\forall x(\neg C(x) \rightarrow \neg B(x,x))$	premisa o axioma
(3) $D(x) \rightarrow B(x,a)$	T. de Sustitución + Modus ponens (1)
(4) $\neg C(x) \rightarrow \neg B(x,x)$	T. de Sustitución + Modus ponens (2)
(5) $\neg B(x,a) \rightarrow \neg D(x)$	Contraposición o Consecuencia tautológica(3)
(6) $\neg C(a) \rightarrow \neg B(a,a)$	Regla de substitución (4)
(7) $\neg B(a,a) \text{->} \neg D(a)$	Regla de substitución (5)
(8) $\neg C(a) \rightarrow \neg D(a)$	Silogismo o Consecuencia tautológica (6) y (7)
(9) $\neg \neg C(a) \vee \neg D(a)$	Def $\rightarrow$ (8)
(10) $D(a)$	premisa o axioma
(11) $\neg \neg C(a)$	Consecuencia tautológica (9) y (10)
(12) $C(a)$	Consecuencia tautológica (11)
(13) $C(a) \text{->} \exists x\ C(x)$	Ax. Proposicional
(14) $\exists x\ C(x)$	Modus Ponens (12) y (13)

3. Encuentre un modelo (con dominio o universo {0, 1}, de dos individuos) para la teoría que tiene como axiomas no lógicos las fórmulas:

$A_1 : \exists x\ (B(x)\ \wedge C(x))$
$A_2 : \forall x\ (B(x)\ \wedge C(x)\ \rightarrow D(x))$
$A_3 : B(a)$

y que, simultáneamente, falsifique (o invalide, o sea contraejemplo) de la fórmula D(a).
B, C y D son símbolos de predicado unoario y *a* una constante. Razone la respuesta.

Dado que el lenguaje de la teoría incluye una sola constante (‘a’) pero el dominio de interpretación contiene dos individuos, ampliamos el lenguaje de la teoría con una segunda constante ‘b’ y, posteriormente, identificaremos ‘a’ y ‘b’ con los nombres de los individuos que les correspondan en M.

Sea la siguiente estructura o interpretación:

$\mathbf{M(a) = 0}$
$\mathbf{M(b) = 1}$

$B_M(0) = V$	$B_M(1) = V$	$(B_M = \{0,1\})$
$C_M(0) = F$	$C_M(1) = V$	$(C_M = \{1\})$
$D_M(0) = F$	$D_M(1) = V$	$D_M = \{1\}$

En ella, las fórmulas A_1, A_2, A_3 son todas verdaderas, mientras que la fórmula D(a) es falsa:

$M(\exists x(B(x)\ \wedge C(x))) = V$ sii $M(B(c_0)\ \wedge C(c_0))) = V$ para alguna constante c_0 del lenguaje, sea c_0=b:
$M(B(b) \wedge C(b))) = V$ sii $M(B(b)) = V$ y $M(C(b)) = V$ (o sii $sig_\wedge(B(b), C(b)) = V$)
$M(B(b)) = V$ sii $B_M(M(b)) = V$ sii $B_M(1) = V$
$M(C(b)) = V$ sii $C_M(M(b)) = V$ sii $C_M(1) = V$

$M(\forall x(B(x)\ \wedge C(x)\ \rightarrow D(x))) = V$ sii $M((B(a) \wedge C(a)\ \rightarrow D(a))) = V$ y $M((B(b) \wedge C(b)\ \rightarrow D(b))) = V$

$M((B(a) \wedge C(a)\ \rightarrow D(a))) = V$ sii $M(B(a) \wedge C(a)) = F$ o bien $M(D(a)) = V$ (o sii $sig_\rightarrow(B(a) \wedge C(a), D(a)) = V$)
$M(B(a) \wedge C(a)) = F$ sii $M(B(a)) = F$ o bien $M(C(a)) = F$ (o sii $sig_\wedge(B(a), C(a)) = F$)
$M(C(a)) = F$ sii $C_M(M(a)) = F$ sii $C_M(0) = F$

$M((B(b) \wedge C(b)\ \rightarrow D(b))) = V$ sii $M(B(b) \wedge C(b)) = F$ o bien $M(D(b)) = V$ (o sii $sig_\rightarrow(B(b) \wedge C(b), D(b)) = V$
$M(D(b)) = V$ sii sii $D_M(M(b)) = V$ sii sii $D_M(1) = V$

$M(B(a)) = V$ sii $B_M(M(a)) = V$ sii $B_M(0) = V$

$M(D(a)) = F$ sii $D_M(M(a)) = F$ sii sii $D_M(0) = F$

Hemos demostrado que M es modelo de $T(A_1, A_2, A_3)$ y que M es contra-modelo de D(a), es decir D(a) no es válida en M.

(b) Utilizando la respuesta anterior, dígase si ocurre que
$T[A_1, A_2, A_3] \vdash D(a)$
justificándolo con el teorema de validez.

El teorema de validez afirma que si una fórmula es teorema de una teoría, entonces dicha fórmula es válida en esa teoría. Una fórmula es válida en una teoría si lo es en todo modelo de la teoría.

Puesto que hay al menos un modelo de $T[A_1, A_2, A_3]$ que no es modelo de D(a) (en el que D(a) no es válida), D(a) no es válida en $T[A_1, A_2, A_3]$. Por contraposición del teorema de validez, D(a) no es teorema de $T[A_1, A_2, A_3]$.

Junio 2006

1. (a) De una fórmula, A, puede decirse que es **válida en una estructura M, lógicamente válida** (también llamada **válida** sin más) o **válida en una teoría T**. Escríbanse las tres definiciones de forma que queden claramente diferenciadas.

1. *A, fórmula del lenguaje L, es* ***válida en una estructura M para L*** *si todas sus M-estancias, A', son V en M, es decir, M(A')=V.*
2. *A es* ***lógicamente válida,*** *o, simplemente,* ***válida*** *si es válida en toda estructura M para L.*
3. *A es* ***válida en una teoría T*** *si es válida en todos sus modelos.*

(a) Enúnciese y demuéstrese la regla de substitución.

Si T |— A y A' es una estancia de A entonces T |— A'
(A' es, por ***definición****, una estancia de A si A' es* $A_{x1,x2,...,xn}[a_1,a_2,...,a_n]$*)*

Demostración*.*

Si A' es $A_x[a]$

1 $T \vdash A$	*hipótesis*
2 $T \vdash \forall x\, A$	*regla de generalización 1*
3 $T \vdash \neg\exists x\, \neg A$	*definición de* $\forall$ 2
4 $T \vdash \neg A_x[a] \rightarrow \exists x \neg A$	*axioma de substitución*
5 $T \vdash A_x[a]$	*consecuencia tautológica de 3 y 4*

Si A' es $A_{x1,x2,...,xn}[a_1,a_2,...,a_n]$*. Sean* $y_1,y_2,...,y_n$ *variables que no aparecen en A ni A'. Aplicando la primera parte n veces llegamos a* $A_{x1,x2,...,xn}[y_1,y_2,...,y_n]$ *y, volviéndola a aplicar n veces en la forma*

$T \vdash A_{x1,x2,...,xn}[y_1,y_2,...,y_n]$ *entonces* $T \vdash A_{x1,x2,...,xn}[y_1,y_2,...,y_n]_{y1}[a_1]$*, que es*

$T \vdash A_{x1,x2,...,xn}[a_1,y_2,...,y_n]$,

se llega a

$T \vdash A_{x1,x2,...,xn}[a_1,a_2,...,a_n]$.

2. **(a)** Demuestre mediante una tabla analítica o utilizando el sistema axiomático de Shoenfield:

$T[\ q \wedge t \wedge w,\ t \rightarrow (p \wedge \neg s),\ (p \wedge \neg r) \rightarrow\ \neg q\ ] \vdash r$

1.	$q \wedge t \wedge w$	Axioma no lógico
2.	$t \rightarrow (p \wedge \neg s)$	Axioma no lógico
3.	$(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q$	Axioma no lógico
4.	q	Eliminación conjunción (1)
5.	t	Eliminación conjunción (1)
6.	$p \wedge \neg s$	Modus Ponens (2,5)
7.	p	Eliminación conjunción (6)
8.	$\neg(p \wedge \neg r) \vee \neg q$	Definición implicación (3)
9.	$\neg(p \wedge \neg r)$	Corte (4,8)
10.	$\neg p \vee \neg\neg r$	De Morgan (9)
11.	$\neg\neg r$	Corte (7,10)
12.	r	Doble negación (11)

(b) Demuestre mediante una tabla analítica o utilizando el sistema axiomático de Shoenfield:

$T[\ \exists x(A(x) \rightarrow B(x)),\ \forall y \neg B(y)\ ] \vdash \exists x \neg A(x) \vee \forall y C(y)$

1.	$\exists x(A(x) \rightarrow B(x))$	Axioma no lógico
2.	$\forall y \neg B(y)$	Axioma no lógico
3.	$A(a) \rightarrow B(a)$	Axioma no lógico de la teoría ampliada T_a[1,2,3]
4.	$\neg B(a)$	Eliminación cuantificador universal (2)
5.	$\neg A(a)$	Modus Tollens (3,4)
6.	$\neg A(a) \rightarrow \exists x \neg A(x)$	Axioma de sustitución
7.	$\exists x \neg A(x)$	Modus Ponens (5,6)
8.	$\exists x \neg A(x) \vee \forall y C(y)$	Expansión (7)

I.	$T_a[\exists x(A(x) \rightarrow B(x)),\ \forall y \neg B(y),\ A(a) \rightarrow B(a)] \vdash \exists x \neg A(x) \vee \forall y C(y)$	
II.	$T_a[\exists x(A(x) \rightarrow B(x)),\ \forall y \neg B(y)] \vdash (A(a) \rightarrow B(a)) \rightarrow \exists x \neg A(x) \vee \forall y C(y)$	(T. deducción)
III.	$T[\exists x(A(x) \rightarrow B(x)),\ \forall y \neg B(y)] \vdash (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow \exists x \neg A(x) \vee \forall y C(y)$	(T. constantes)
IV.	$T[\exists x(A(x) \rightarrow B(x)),\ \forall y \neg B(y)] \vdash \exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow \exists x \neg A(x) \vee \forall y C(y)$	(R. Introd. $\exists$)
V.	$T[\exists x(A(x) \rightarrow B(x)),\ \forall y \neg B(y)] \vdash \exists x(A(x) \rightarrow B(x))$	(Ax. no lógico)
VI.	$T[\exists x(A(x) \rightarrow B(x)),\ \forall y \neg B(y)] \vdash \exists x \neg A(x) \vee \forall y C(y)$	(Modus Ponens)

3. Demuestre, por medios semánticos en un dominio de dos individuos y aplicando el teorema de validez, que Q(a,a) no es un teorema de la teoría:

$$T[\ \forall x \exists y(P(x) \rightarrow Q(x,y)),\ \forall x(\neg R(x) \vee P(x)),\ \exists x R(x)\ ]$$

Sea |M| un dominio de dos elementos: {1,2} y L(M) = $\{P^1, Q^2, R^1\} \cup \{a, b\}$
Definamos a continuación una estructura M tal que:

1) $M(\forall x \exists y(P(x) \rightarrow Q(x,y))) = V$
2) $M(\forall x(\neg R(x) \vee P(x))) = V$
3) $M(\exists x R(x)) = V$
4) $M(Q(a,a)) = F$

De modo que M valida (satisface, es modelo de) la teoría $T[\ \forall x \exists y(P(x) \rightarrow Q(x,y)),\ \forall x(\neg R(x) \vee P(x)),\ \exists x R(x)\ ]$ *al tiempo que no valida (no satisface, es contramodelo de) Q(a,a).*

Sea M(a) = 1
Sea M(b) = 2

1) $M(\forall x \exists y(P(x) \rightarrow Q(x,y))) = V$ sii $M(\exists y(P(a) \rightarrow Q(a,y))) = V$ y $M(\exists y(P(b) \rightarrow Q(b,y))) = V$

$M(\exists y(P(a) \rightarrow Q(a,y))) = V$ sii $M(P(a) \rightarrow Q(a,b)) = V$ sii $M(P(a)) = F$ o $M(Q(a,b) = V$
$M(Q(a,b)) = V$ sii $Q_M(M(a),M(b)) = V$ sii $Q_M(1,2) = V$

$M(\exists y(P(b) \rightarrow Q(b,y))) = V$ sii $M(P(b) \rightarrow Q(b,a)) = V$ sii $M(P(b)) = F$ o $M(Q(b,a) = V$
$M(Q(b,a)) = V$ sii $Q_M(M(b),M(a)) = V$ sii $Q_M(2,1) = V$

2) $M(\forall x(\neg R(x) \vee P(x))) = V$ sii $M(\neg R(a) \vee P(a)) = V$ y $M(\neg R(b) \vee P(b)) = V$

$M(\neg R(a) \vee P(a))) = V$ sii $M(\neg R(a)) = V$ o $M(P(a)) = V$
$M(P(a)) = V$ sii $P_M(M(a)) = V$ sii $P_M(1) = V$

$M(\neg R(b) \vee P(b))) = V$ sii $M(\neg R(b)) = V$ o $M(P(b)) = V$
$M(P(b)) = V$ sii $P_M(M(b)) = V$ sii $P_M(2) = V$

3) $M(\exists x R(x)) = V$ sii $M(R(a)) = V$ sii $R_M(M(a)) = V$ sii $R_M(1) = V$

4) $M(Q(a,a)) = F$ sii $Q_M(M(a),M(a)) = F$ sii $Q_M(1,1) = F$

Así pues, la estructura:
$Q_M(1,2) = V$, $Q_M(2,1) = V$,
$P_M(1) = V$, $P_M(2) = V$
$R_M(1) = V$
$Q_M(1,1) = F$
valida (satisface, es modelo de) la teoría T y hace falsa la fórmula Q(a,a). Por tanto, ha quedado demostrado que Q(a,a) no es válida en los modelos de, ni, por tanto, en la teoría:

$$T[\ \forall x \exists y(P(x) \rightarrow Q(x,y)),\ \forall x(\neg R(x) \vee P(x)),\ \exists x R(x)\ ]$$

Por el teorema de validez, al no ser Q(a,a) válida en dicha teoría, podemos concluir que Q(a,a) no es teorema de $T[\ \forall x \exists y(P(x) \rightarrow Q(x,y)),\ \forall x(\neg R(x) \vee P(x)),\ \exists x R(x)\ ]$.

Septiembre 2006

1. Sean las siguientes fórmulas de un lenguaje de primer orden, con **P** símbolo de predicado binario, **Q** y **R** símbolos de predicado unoario y **a** símbolo de constante:

A_1: $\forall x \, \forall y \; P(x, y)$
A_2: $\forall x \, (P(x, a) \rightarrow Q(x))$
A_3: $\exists x \, (Q(x) \wedge R(x))$

Utilícese el teorema de validez para demostrar detalladamente (definiendo de forma adecuada una estructura con universo {1, 2}, de dos individuos) que R(a) **no** es un teorema de la teoría $T[A_1, A_2, A_3]$.

Definición de la estructura M
*|M| = {1,2}, a la constante **a** se le hace corresponder el individuo 1, es decir M(a)=1,* $P_M = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\} = |M|^2$, $Q_M = \{1, 2\} = |M|$, $R_M = \{2\}$.
El lenguaje de partida, L, se amplía a L(M) con c_1 *y* c_2 *nombres, respectivamente, de 1 y 2, es decir* $M(c_1)=1$ *y* $M(c_2)=2$.

Resolución
En M:

- $M(A_1) = V$ *por la definición de significado de la cuantificación universal y porque* $M(P(i,j)) = P_M\,(M(i),M(j)) = V$*, para todo par de nombres i,j, según la definición de* P_M.
- $M(A_2) = V$ *por la definición de significado de la cuantificación universal y de la implicación y porque* $M(P(i, a) \rightarrow Q(i)) = V$*, para todo nombre de individuo i, según la definición de* P_M *y* Q_M.
- $M(A_3) = V$ *por la definición de significado de la cuantificación existencial y de la conjunción y porque* $M(Q(i) \wedge R(i)) = V$*, para algún nombre de individuo i, según la definición de* Q_M *y* R_M*, concretamente para* c_2
- $M(R(a)) = F$ *porque* $M(R(a)) = R_M\,(M(a)) = R_M\,(1) = F$*, según la definición de* R_M

Como las cuatro fórmulas son cerradas, resulta que A_i *que son V en M, son válidas en M (con lo que M es un modelo de* $T[A_1, A_2, A_3]$*) y R(a), que es F en M, no es válida en M.*

El teorema de validez dice que todos los teoremas de una teoría son válidos en dicha teoría. Por la definición de validez en una teoría, R(a) sería válida en la teoría $T[A_1, A_2, A_3]$ *si R(a) fuera válida en todos los modelos de dicha teoría. Como esta estructura M es un modelo de* $T[A_1, A_2, A_3]$ *y R(a) no es válida en M, R(a) no es válida en la teoría y, por el contra recíproco del teorema de validez, no es teorema de esa teoría.*

2. **A** Para el lenguaje de primer orden L, cuyos símbolos no lógicos son los símbolos de predicado unoario B, C y D así como el binario A, encuentre (utilizando el sistema axiomático de Shoenfield) una demostración para la fórmula $\exists x\, A(x,x)$ en la teoría cuyos axiomas no lógicos son:

P1. $\exists x\, \forall y\, (C(y) \rightarrow A(x,y) \vee \neg B(x))$
P2. $\forall y\, B(y)$
P3. $\forall x\, (B(x) \wedge C(x))$

2. B. Utilizando 4 símbolos de predicado 0-ario o proposición (**F, E, D** y **C**), formalizar (sin cuantificadores) las frases siguientes.

(a) O Manuel fue a la fiesta con Quico, o Manuel consiguió descansar o Quico alcanzó su éxito.
(b) Manuel fue a la fiesta con Quico solo si o Manuel no consiguió descansar o Quico alcanzó su éxito.
(c) Si el coche no estaba en su sitio o Manuel fue a la fiesta con Quico entonces, Quico alcanzó su éxito.
(d) No estaba el coche en su sitio.

2.B.1: Indique en el sitio indicado, las frases o enunciados que se corresponden con los símbolos:

F:

E:

D:

C:

2.B.2: Escriba a continuación las fórmulas correspondientes a (a), (b), (c) y (d)

(a):

(b):

(c):

(d):

2.B.3: Escriba (utilizando el sistema axiomático de Shoenfield) una demostración a partir de las fórmulas anteriores de que “Quico alcanzó su éxito”

3 (a) Demuéstrese detalladamente (en el caso particular de que todas las fórmulas A_i sean elementales o negaciones de fórmulas elementales) que, dada una disyunción finita, $A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$, siempre se puede decidir en un número finito de pasos si es o no tautología.

Si todas las A_i son fórmulas elementales o negaciones de fórmulas elementales, entonces la disyunción, $A := A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$, es una tautología si y sólo si cierta fórmula de la disyunción, A_i, es la negación, $\neg A_k$, de otra A_k de la misma disyunción. En efecto. Consideremos los dos casos posibles.

(i) Cierta fórmula de la disyunción, A_i, es la negación, $\neg A_k$, de otra A_k de la misma disyunción.

*En este caso es inmediato que para toda valoración, v, o bien $v(A_k) = V$, o bien $v(A_k) = F$. En el primer caso, $v(A) = V$, por la definición de **v** para la disyunción y en el segundo $v(A_i) = v(\neg A_k) = V$ con lo que también **v(A) = V**. Al ser **v** arbitraria, esto demuestra que **A es una tautología.***

(ii) Ninguna fórmula de la disyunción, A_i, es la negación, $\neg A_k$, de otra A_k de la misma disyunción.

*En este caso podemos definir una valoración **v** de la siguiente forma. Sea B una fórmula elemental cualquiera.*

si B es una A_i de la disyunción	*v(B) = F*
si $\neg$ B es una A_i de la disyunción	*v(B) = V*
en cualquier otro caso	*v(B) = V*

(este último valor puede ser indistintamente V, como se ha elegido, o F)

*Para la **v** así definida $v(A_i) = F$, para toda fórmula A_i de A y por tanto **v(A) = F**. Luego **A no es tautología**.*

Como la operación de decidir si cierta fórmula de la disyunción, A_i, es la negación, $\neg A_k$, de otra A_k de la misma disyunción se reduce a un número finito de comparaciones entre las A_i, queda probado el resultado para este primer caso en el que todas las A_i son fórmulas elementales o negaciones de fórmulas elementales.

3 (b) Dada una teoría de primer orden T (sin axiomas no lógicos) con su lenguaje L(T), abreviadamente L, dígase si las siguientes afirmaciones son correctas o no con una breve explicación en el espacio reservado para ello.

Toda fórmula de L es teorema de T
No es correcto. Cualquier fórmula de la forma $A \wedge \neg A$ no es teorema de ninguna T.

Todo teorema de T es fórmula de L
Correcto. Por definición, los teoremas son fórmulas definidas de cierta manera (axiomas y conclusiones de reglas)

Todo axioma de T es teorema de T
Correcto. Es la primera parte de la definición de teorema.

Todo teorema de T es axioma de T
No es correcto. f(x)=f(x) es un teorema de T, pero no es ningún axioma de T.