EJERCICIOS DE EXAMEN DE LÓGICA FORMAL
con algunas soluciones
Curso 2004-2005

Junio.

1. Sea A la fórmula $\forall y\ \exists x\ (x + y = e)$, donde "e" es una constante. Sea M la estructura, para el lenguaje en que está escrita A, formada por los números enteros con la suma ordinaria; y **v** una valoración.

Dígase si las siguientes afirmaciones son correctas o no. Las respuestas deben escribirse en los espacios colocados entre cada dos afirmaciones consecutivas. Las respuestas no se valorarán si no están justificadas. La justificación consiste en relacionar claramente la respuesta con el concepto o resultado adecuado, que **no** debe ser demostrado a su vez.

(a) A es elemental, pero no atómica

Las fórmulas atómicas son de la forma P(t1, t2,...,tn), donde "P" es un símbolo de predicado n-ario y las "t" son términos.

"=" es un símbolo de predicado, y tanto x+y como e son términos, pero x+y=e viene precedida por cuantificadores, luego A no es atómica.

Las fórmulas elementales son las atómicas (y A no lo es) o las precedidas por un "$\exists$". Pero A empieza por "$\forall$". Luego no es elemental.

En todo caso, como $\forall x$ equivale a $\neg\exists x\neg$, A se puede escribir $\neg\exists x\neg\exists$ (x+y=e), que es negación de elemental.

(b) A es válida en cualquier estructura

Sea M' una estructura cualquiera. I, j dos de sus individuos (¡no escriban "valores"!). Se asigna a e un individuo k de M' arbitrariamente, y la pregunta es si SIEMPRE, para cualquier M', para TODO i, hay algún j (no necesariamente el mismo) tal que i +j =k.

Se trata de buscar si hay algún contraejemplo a esto.

Por ejemplo, si M' es el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales (los enteros positivos con el "0"). Se asigna a e por ejemplo el individuo 7 (no digan el "valor"), o el que se quiera.

NO SE VERIFICA que para TODO i hay un j tal que i + j = 7.

Luego A NO es válida en cualquier estructura

(c) Asígnese en M a la constante "e" el número entero "0" (cero).
¿Es $\forall y\ \exists x\ (x + y = e)$, válida en M?

Se hace exactamente el mismo razonamiento que antes, pero aquí el enunciado fuerza a asignar

"0" a "e" en M

En el conjunto |M| = Z de los números enteros, SÍ se verifica que para todo INDIVIDUO (no digan "valor" de x) i, hay un individuo (no digan "valor" –x) j, que es el elemento llamado "opuesto", tal que i + j = 0.

Luego como la única M-estancia de A es ella misma por ser cerrada, y el razonamiento anterior muestra que es verdadera, A es válida en M.

(d) A es V o F en **v**

Como se puede escribir A de la forma $\neg\exists x\neg\exists$ (x+y=e), $\exists x\neg\exists$ (x+y=e) es elemental y una valoración de una fórmula elemental es una asignación arbitraria V o F a esa fórmula, A, por tanto puede ser en unos casos V y en otros F.

(e) Si A es un teorema de cierta teoría, la fórmula $\exists x\ (x + y = e)$ también lo es.

Sí, por el teorema del cierre.

Se puede también probar aplicando el teorema de substitución y Modus Ponens (pero hay que explicitar la prueba)

(Muchos hablan del teorema de validez, que aquí NO se aplica)

2. **(a)** Demuestre mediante una tabla analítica o utilizando el sistema axiomático de Shoenfield:

$T[\, q \wedge t \wedge w,\ t \to (p \wedge \neg s),\ (p \wedge \neg r) \to \neg q \,] \vdash r$

1.	$q \wedge t \wedge w$	Axioma no lógico
2.	$t \to (p \wedge \neg s)$	Axioma no lógico
3.	$(p \wedge \neg r) \to \neg q$	Axioma no lógico
4.	q	Eliminación conjunción (1)
5.	t	Eliminación conjunción (1)
6.	$p \wedge \neg s$	Modus Ponens (2,5)
7.	p	Eliminación conjunción (6)
8.	$\neg(p \wedge \neg r) \vee \neg q$	Definición implicación (3)
9.	$\neg(p \wedge \neg r)$	Corte (4,8)
10.	$\neg p \vee \neg\neg r$	De Morgan (9)
11.	$\neg\neg r$	Corte (7,10)
12.	r	Doble negación (11)

(b) Demuestre mediante una tabla analítica o utilizando el sistema axiomático de Shoenfield:

$T[\, \exists x(A(x) \to B(x)),\ \forall y \neg B(y) \,] \vdash \exists x \neg A(x) \vee \forall y C(y)$

1.	$\exists x(A(x) \to B(x))$	Axioma no lógico
2.	$\forall y \neg B(y)$	Axioma no lógico
3.	$A(a) \to B(a)$	Axioma no lógico de la teoría ampliada T_a[1,2,3]
4.	$\neg B(a)$	Eliminación cuantificador universal (2)
5.	$\neg A(a)$	Modus Tollens (3,4)
6.	$\neg A(a) \to \exists x \neg A(x)$	Axioma de sustitución
7.	$\exists x \neg A(x)$	Modus Ponens (5,6)
8.	$\exists x \neg A(x) \vee \forall y C(y)$	Expansión (7)

I.	$T_a[\exists x(A(x) \to B(x)),\ \forall y \neg B(y),\ A(a) \to B(a)] \vdash \exists x \neg A(x) \vee \forall y C(y)$	
II.	$T_a[\exists x(A(x) \to B(x)),\ \forall y \neg B(y)] \vdash (A(a) \to B(a)) \to \exists x \neg A(x) \vee \forall y C(y)$	(T. deducción)
III.	$T[\exists x(A(x) \to B(x)),\ \forall y \neg B(y)] \vdash (A(x) \to B(x)) \to \exists x \neg A(x) \vee \forall y C(y)$	(T. constantes)
IV.	$T[\exists x(A(x) \to B(x)),\ \forall y \neg B(y)] \vdash \exists x(A(x) \to B(x)) \to \exists x \neg A(x) \vee \forall y C(y)$	(R. Introd. $\exists$)
V.	$T[\exists x(A(x) \to B(x)),\ \forall y \neg B(y)] \vdash \exists x(A(x) \to B(x))$	(Ax. no lógico)
VI.	$T[\exists x(A(x) \to B(x)),\ \forall y \neg B(y)] \vdash \exists x \neg A(x) \vee \forall y C(y)$	(Modus Ponens)

3.

(a) Encuentre un modelo (con dominio o universo {1, 2}, de dos individuos) para la teoría que tiene como axiomas no lógicos las fórmulas:

A_1: $\forall x\ P(x)$

A_2: $\forall x\ (\ P(x)\ \wedge \neg\ Q(x)\ \rightarrow\ R(x)\ )$

A_3: $\exists x\ (\ Q(x)\ \wedge \neg\ R(x)\ )$

y que, simultáneamente, falsifique (o invalide o sea contraejemplo de) la fórmula Q(e).
P, Q y **R** son símbolos de predicado unario y **e** un símbolo de constante.

Definición de la estructura M

|M| = {1,2}, a la constante **e** se le hace corresponder el individuo 1, P_M = |M|, Q_M = {2}, R_M = {1} El lenguaje de partida, L, se amplía a L(M) con j y k nombres, respectivamente, de 1 y 2.

Resolución

En M $\quad M(A_1)$ = V porque $M(P(i)) = P_M\ (M(i))$ = V, para todo nombre i

$M(A_2)$ = V porque

para i el nombre j de 1,$M(P(j)) = P_M\ (M(j)) = P_M\ (1)$ = V = $M(\neg\ Q(j))$ porque $Q_M\ (M(j)) = Q_M\ (1)$ = F, con lo que $M(P(j)\ \wedge \neg\ Q(j))$ es V y $M(R(j) = R_M\ (M(j))$ también es V

y para i el nombre k de 2 $M(\neg\ Q(k))$ es F porque $Q_M\ (M(k)) = Q_M\ (2)$ = V, con lo que $M(P(k)\ \wedge \neg\ Q(k))$ es F.

Es decir, para todo nombre i, $M(P(i)\ \wedge \neg\ Q(i)\ \rightarrow\ R(i))$ es V y eso es la definición de A_2 verdadero.

$M(A_3)$ = V porque $M(Q(k)) = Q_M\ (M(k)) = Q_M\ (2)$= V, $M(\neg R(k))$ = V y eso es la definición de A_3 verdadero.

$M(Q(e))$ = F porque $M(Q(e)) = Q_M\ (M(e)) = Q_M\ (1)$ = F

Como las cuatro fórmulas son cerradas, resulta que A_i que son V en M, son válidas en M (con lo que M es un modelo de $T[A_1, A_2, A_3]$ y Q(e), que es F en M, no es válida en M.

(b) Utilizando la respuesta anterior, responda a la siguiente pregunta:
¿ Es Q(e) un teorema de la teoría $T[A_1, A_2, A_3]$? Justifique la respuesta con el teorema de validez.

No. El teorema de validez dice que los teoremas de una teoría son válidos en dicha teoría. Por tanto, y por la definición de validez en una teoría, Q(e) debe ser válida en todos los modelos de la misma. Como esta estructura M es un modelo de $T[A_1, A_2, A_3]$ y Q(e) no es válida en él, Q(e) no es válida en la teoría y, por el contrarrecíproco del teorema de validez, no es teorema de esa teoría.

Febrero

1. Contéstese a las siguientes cuestiones brevemente, utilizando solamente el espacio que se asigna a cada una de ellas.

(a). ¿En qué se parecen y en qué se diferencian estructura y modelo?

Se parecen en que ambas son estructuras (universo, funciones y predicados que dan significado a un lenguaje de primer orden). Se diferencian en que un modelo es una estructura particular en la que son válidos todos los axiomas de cierta teoría. Esto no ocurre en general para cualquier estructura, salvo que la teoría no tenga axiomas no lógicos.

(b). ¿Por qué si una fórmula es cerrada, decir que es válida en M equivale a decir que es verdadera en M?

Porque todas sus M-estancias son la propia fórmula y, al ser verdaderas, ésta es válida en M por definición.

(c). Defínase teorema ¿Hay alguna otra definición equivalente? ¿Cuál?

(a) Los axiomas son teoremas

(b) Las conclusiones de reglas lógicas aplicadas a premisas que son teoremas, son teoremas.

(c) Sólo son teoremas las fórmulas definidas por (a) o (b)

Es equivalente, por el teorema de tautología, esta otra definición

(a) Los axiomas de substitución, identidad, igualdad y no lógicos son teoremas

(b) Las consecuencias tautológicas de teoremas, son teoremas.

(c) La conclusión de la regla de introducción del $\exists$ aplicada a una premisa que es un teorema, es teorema

(c) Sólo son teoremas las fórmulas definidas por (a) (b) o (c)

(d). Demuéstrese que si las premisas $A \vee B$, $\neg A \vee C$ de la regla de corte son válidas en una estructura cualquiera M, entonces la conclusión $B \vee C$ también lo es. ¿Dónde se utiliza este resultado?

*Sea $B' \vee C'$ una M-estancia cualquiera de $B \vee C$ y $A' \vee B'$, $\neg A' \vee C'$ las correspondientes (con las mismas substituciones cuando sean aplicables) M-estancias de las premisas. Como, por hipótesis, ambas $A' \vee B'$, $\neg A' \vee C'$ son **V**, entonces*

si M(A') es V, M($\neg$A') es F, M(C') es V y M($B' \vee C'$) es V

si M(A') es F, M(B') es V y M($B' \vee C'$) es V

Resulta que cualquier M-estancia de $B \vee C$ es V y, por tanto, la fórmula es válida en M.

2a: Constrúyase una tabla analítica para demostrar si la siguiente estructura deductiva, que afirma que d v ¬b es un teorema de la teoría que se indica, es válida o no. En caso negativo, indíquese la semántica (estructura) o valoración, que puede derivarse de la tabla, y que justifica esa respuesta.

$$\mathbf{T[\ a \rightarrow (\neg b \vee e),\ \neg d \rightarrow \neg c,\ a \vee c\ ] \vdash d \vee \neg b}$$

1. $a \rightarrow (\neg b \vee e)$
2. $\neg d \rightarrow \neg c$
3. $a \vee c$
4. $\neg (d \vee \neg b)$ — *Negación de la conclusión a probar*
5. $\neg d$ — R $\neg$ v, 4
6. $\neg\neg b$ — R $\neg$ v, 4
7. b — R $\neg\neg$, 6

10. $\neg\neg d$ — R $\rightarrow$, 2 | 11. $\neg c$ — R $\rightarrow$, 2

12. d   R ¬¬, 10
X   *Cierre5-12*   13. a   R v, 3   14. c
R v, 3
X   *Cierre11-14*
15. ¬a R →, 1   16. ¬b v e   R →, 1
X   *Cierre13-15*
17. ¬b R v, 16
18. e   R v, 16
X   *Cierre7-17*

La tabla analítica ***no*** cierra en todos sus caminos. Por tanto, la estructura deductiva es ***inválida***. La semántica que se deriva de esta tabla y que justifica esta conclusión es la siguiente:

v(e) = V, v(a) = V, v(c) = F, v(b) = V, v(d) = F

2b: Constrúyase una tabla analítica para demostrar si el siguiente conjunto de fórmulas es insatisfacible (o, equivalentemente, es el conjunto de axiomas de una teoría inconsistente) o bien es satisfacible (es decir, es el conjunto de axiomas de una teoría consistente):

$$\{A_1 : \forall x \exists y(P(x,y) \rightarrow Q(y)),\ A_2 : \forall x(\forall y Q(y) \vee P(a,x))\ \ A_3 : \neg\exists x Q(x)\ \}$$

1. $\forall x \exists y(P(x,y) \rightarrow Q(y))$
2. $\forall x(\forall y Q(y) \vee P(a,x))$
3. $\neg\exists x Q(x)$
4. $\exists y(P(a,y) \rightarrow Q(y))$ R∀, 1, x/a
5. $P(a,b) \rightarrow Q(b)$ R∃, 4, y/b
6. $\forall y Q(y) \vee P(a,b)$ R∀, 2, x/b

7. $\neg P(a,b)$ R→, 5   8. $Q(b)$ R→, 5
9. $\neg Q(b)$ R¬∃, 3, x/b
10. $\forall y Q(y)$ R∨, 6   11. $P(a,b)$ R∨, 6   X
Cierre 8-10
12. $Q(b)$ R∀, 10, y/b   X   *Cierre 7-11*
13. $\neg Q(b)$ R¬∃, 3, x/b
X *Cierre12-13*

Todas las ramas de la tabla analítica cierran. Por tanto, el conjunto de fórmulas $\{A_1, A_2, A_3\}$ **es *insatisfacible*** (o forma una teoría *inconsistente*).

3. Sean las siguientes fórmulas de un lenguaje de primer orden con h símbolo de función unoaria, A símbolo de predicado binario y B símbolo de predicado unoario.

P_1: ∃y A(f(y), y)

P_2: ∃x B(x)

Q: ∃y (A(f(y),y) ∧ B(y)).

Utilícese el teorema de validez para demostrar detalladamente (definiendo de forma adecuada una estructura con su universo, de dos individuos, funciones y predicados) que Q no es un teorema de la teoría $T[P_1, P_2]$.

Definición de la estructura M ***(puede haber otras igualmente correctas)***

$|M| = \{0,1\}$, $f_M(x)=x$, $A_M = \{(0,0)\}$, $B_M = \{1\}$ El lenguaje de partida, L, se amplía a L(M) con i y j nombres, respectivamente, de 0 y 1.

En M $M(P_1) = V$ *porque* $M(A(f(i),i)) = A_M(f_M(M(i)), M(i)) = A_M(0,0) = V$

$M(P_2) = V$ *porque* $M(B(j)) = B_M(M(j)) = B_M(1) = V$

$M(Q) = F$ *porque, por un lado,* $M(A(f(j),j)) = A_M(f_M(M(j)), M(j)) = A_M(1,1) = F$ *y, por tanto,* $M((A(f(j),j) \wedge B(j))=F$,

por otro lado, $M(B(i)) = B_M(M(i)) = B_M(0) = F$ *y, por tanto,*

$M((A(f(i),i) \wedge B(i))=F$

luego $M((A(f(n),n) \wedge B(n))$ *no es V para ningún nombre n y* $M(Q)=F$

Como las tres fórmulas son cerradas, resulta que P_1 y P_2, que son V en M, son válidas en M (con lo que M es un modelo de $T[P_1, P_2]$) y Q, que es F en M, no es válida en M.
El teorema de validez dice que los teoremas de una teoría son válidos en todos los modelos de la misma, en este contraejemplo resulta que Q no es válida en un modelo, M, de $T[P_1, P_2]$ y, por tanto no es teorema de esa teoría.

Septiembre.

1. Sean A la fórmula ∀y ∃x (x + y = e); M la estructura, para el lenguaje en que está escrita A, con universo |M| = {0, 1, 2} y con la suma definida así:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Dígase si las siguientes afirmaciones son correctas o no. Las respuestas deben escribirse en los espacios colocados entre cada dos afirmaciones consecutivas. Las respuestas no se valorarán si no están justificadas. La justificación consiste en relacionar claramente la respuesta con el concepto o resultado adecuado, que **no** debe ser demostrado a su vez.

(f) <u>La fórmula B: ∃x (x +y = e) es elemental y atómica</u>
Las fórmulas atómicas son de la forma P(t1, t2,...,tn), donde "P" es un símbolo de predicado n-ario y las "t" son términos.
"=" es un símbolo de predicado, y tanto x+y como e son términos, pero x+y=e, que sí sería atómica, viene precedida en B por un cuantificador, luego B no es atómica.
Las fórmulas elementales son las atómicas (y B no lo es) o las existenciales (las precedidas por un "∃"), luego B SÍ es elemental

(g) <u>A es verdadera en M, A es válida en M (asígnese a e el individuo "1").</u>
La pregunta es si, para cualquier, para TODO, individuo (no escriban "valor", sino "individuo") i de M, hay algún individuo j de M (no necesariamente el mismo j para todo i) tal que i +j =1.
En la tabla se comprueba 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 2 + 2 = 1, luego SÍ se verifica lo que hemos preguntado.
Luego A es verdadera en M
Luego A es válida en M pues, al ser cerrada, "verdadera en M" equivale a "válida en M", ya que ella es su única M-estancia

(h) <u>B es una tautología</u>
Una tautología es una fórmula que es verdadera PARA CUALQUIER VALORACIÓN.
Pero a las fórmulas elementales (B lo es), se les pueden asignar ARBITRARIAMENTE valoraciones que la hagan verdaderas u otras que las hagan falsas. Luego NO es una tautología (Atención, no se puede usar para nada en esta pregunta la idea de "ser válida en una estructura", no confundan validez en estructuras con verdad en valoraciones).

d) <u>Si B es un teorema en una teoría T, A es válida en T.</u>
Si B es un teorema en una teoría T, por el Teorema del Cierre, A es también teorema en T. Pero entonces, por el Teorema de Validez, A es válida en T (es decir, válida en todos los modelos de T).

2.

(a) Demuestre mediante una tabla analítica o utilizando el sistema axiomático de Shoenfield:

T[a → e, a ∨ c, c → ¬d] |— d → e

Sea T' = T ∪ { d }

13. T' |— a → e **Axioma no lógico**

14. T' $\vdash$ $a \vee c$	**Axioma no lógico**
15. T' $\vdash$ $c \rightarrow \neg d$	**Axioma no lógico**
16. T' $\vdash$ d	**Axioma no lógico**
17. T' $\vdash$ $\neg c \vee \neg d$	**Definición implicación (3)**
18. T' $\vdash$ $\neg c$	**Corte (4,5)**
19. T' $\vdash$ a	**Corte (2,6)**
20. T' $\vdash$ e	**Modus Ponens (1,7)**
21. T $\vdash$ $d \rightarrow e$	**Teorema de Deducción (8)**

(b) Demuestre mediante una tabla analítica o utilizando el sistema axiomático de Shoenfield:

$T[\ \exists x(A(x) \wedge B(a)),\ \forall y(A(y) \rightarrow (B(y) \wedge D(y))),\ \forall z(\neg B(z) \vee C(z))\ ] \vdash C(a) \wedge \exists y D(y)$

Sea $T_a = T \cup \{ A(b) \wedge B(a) \}$

9. $T_a \vdash \exists x(A(x) \wedge B(a))$	**Axioma no lógico**
10. $T_a \vdash \forall y(A(y) \rightarrow (B(y) \wedge D(y)))$	**Axioma no lógico**
11. $T_a \vdash \forall z(\neg B(z) \vee C(z))$	**Axioma no lógico**
12. $T_a \vdash A(b) \wedge B(a)$	**Axioma no lógico**
13. $T_a \vdash A(b)$	**Eliminación conjunción (4)**
14. $T_a \vdash B(a)$	**Eliminación conjunción (4)**
15. $T_a \vdash \neg B(a) \vee C(a)$	**Eliminación cuantificación universal (3)**
16. $T_a \vdash C(a)$	**Corte (6,7)**
17. $T_a \vdash A(b) \rightarrow (B(b) \wedge D(b))$	**Eliminación cuantificación universal (1)**
18. $T_a \vdash B(b) \wedge D(b)$	**Modus Ponens (5,9)**
19. $T_a \vdash D(b)$	**Eliminación conjunción (10)**
20. $T_a \vdash D(b) \rightarrow \exists y D(y)$	**Axioma de sustitución**
21. $T_a \vdash \exists y D(y)$	**Modus Ponens (11,12)**
22. $T_a \vdash C(a) \wedge \exists y D(y)$	**Producto (8,13)**
23. $T_a \vdash A(b) \wedge B(a) \rightarrow C(a) \wedge \exists y D(y)$	**Teorema de Deducción (14)**
24. $T \vdash A(x) \wedge B(a) \rightarrow C(a) \wedge \exists y D(y)$	**Teorema de Constantes (15)**
25. $T \vdash \exists x(A(x) \wedge B(a)) \rightarrow C(a) \wedge \exists y D(y)$	**Introducción cuantificación existencial (16)**
26. $T \vdash C(a) \wedge \exists y D(y)$	**Modus Ponens (1,17)**

3.
Sean las siguientes fórmulas de un lenguaje de primer orden, con A símbolo de predicado binario, B y C símbolos de predicado unoario y e símbolo de constante:

P_1: $\forall x \forall y\ (A(x, y) \wedge C(x))$
P_2: $\forall x\ (A(e, x) \rightarrow \neg B(x))$
Q: $B(e) \vee \neg C(e)$

Utilícese el teorema de validez para demostrar detalladamente (definiendo de forma adecuada una estructura con universo {1, 2}, de dos individuos) que Q no es un teorema de la teoría $T[P_1, P_2]$.

Definición de la estructura M

$|M| = \{1,2\}$, a la constante **e** se le hace corresponder el individuo 1, $A_M = |M|^2$, $B_M = \Phi$ (vacío), $C_M = |M|$ El lenguaje de partida, L, se amplía a L(M) con j y k nombres, respectivamente, de 1 y 2.

Resolución

En M $M(P_1) = V$ por la definición de significado de la cuantificación universal y la conjunción y porque $M(A(i_1,i_2)) = A_M(M(i_1),M(i_2)) = V$, para todo par de nombres i_1,i_2 y $M(C(i_1)) = C_M(M(i_1)) = V$, según las definiciones de A_M y C_M

$M(P_2) = V$ por la definición de significado de la cuantificación universal y de la implicación y porque $M(\neg B(i)) = V$, porque $M(B(i)) = B_M(M(i)) = F$ para todo nombre i, según la definición de B_M.

$M(B(e) \vee \neg C(e)) = F$ porque $M(B(e)) = B_M(M(e)) = B_M(1) = F$ y $M(\neg C(e)) = F$ porque $M(C(e)) = C_M(M(e)) = C_M(1) = V$, según la definición de C_M

Como las tres fórmulas son cerradas, resulta que P_i que son V en M, son válidas en M (con lo que M es un modelo de $T[P_1, P_2]$ y Q: $B(e) \vee \neg C(e)$, que es F en M, no es válida en M.

Por tanto Q no es un teorema de la teoría $T[P_1, P_2]$. El teorema de validez dice que los teoremas de una teoría son válidos en dicha teoría. Es decir, por la definición de validez en una teoría, Q debería ser válida en todos los modelos de T para ser teorema de la misma. Como esta estructura M es un modelo de $T[P_1, P_2]$ y Q no es válida en él, Q no es válida en la teoría y, por el contrarrecíproco del teorema de validez, no es teorema de esa teoría.