EXAMEN JUNIO 1997

1. Se tiene una teoría, T, con lenguaje $L(T)$ (que incluye el símbolo de constante, 0, y el símbolo de función binaria $+$), dos axiomas no lógicos:
   - $\forall y(0 + y = y)$
   - $\forall y \exists z(y + z = 0)$

   y una estructura, M, con $|M| = \{0', 1', 2'\}$, la función $+_M$ definida por la tabla:

$+_M$	$0'$	$1'$	$2'$
$0'$	$0'$	$1'$	$2'$
$1'$	$1'$	$2'$	$1'$
$2'$	$2'$	$1'$	$1'$

   ($a' +_M b'$ es el individuo que se encuentra en la intersección de la fila a' y la columna b' de la tabla), y a la constante 0 le asigna el individuo $0'$.

EXAMEN JUNIO 1997 (Cont.)

- Dígase claramente y de forma razonada si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

  1.1. $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ tiene el valor V en M.

  1.2. Sin embargo, $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ no es válida en M.

  1.3. M es un modelo de T.

  1.4. $\forall y(0 + y = y)$ es válida en M porque es un axioma no lógico.

  1.5. Todo teorema de T es válido en M.

SOLUCIÓN EXAMEN JUNIO 1997

1.1. $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ tiene el valor V en M.

- Es correcta.
- $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ es V en M si, aplicando la definición de $M(\forall A)$ dos veces, $M(i + j = j + i)$ es V para todo par de nombres de individuos i, j.
- Esto ocurre si $M(i) +_M M(j) = M(j) +_M M(i)$, para todo par de individuos $M(i) y M(j)$, y esto se deduce de la definición (tabla) de $+_M$.
- Esto se puede ver fácilmente dado que la tabla (matriz) anterior es simétrica respecto a la diagonal principal.

1.2. Sin embargo, $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ no es válida en M.

- Es incorrecta.
- La fórmula será válida en M si y sólo si toda M–instancia de dicha fórmula es V en M (definición de validez en una estructura).
- Como la fórmula es cerrada, la única M–instancia de dicha fórmula es ella misma.
- Por tanto, la fórmula es válida en M si y sólo si es V en M.
- Como la fórmula es V en M (apartado 1.1), concluimos que dicha fórmula es válida en M.

1.3. M es un modelo de T.

- Es incorrecta.
- Será cierto si y sólo si M es un modelo de cada uno de los axiomas no lógicos de T.
- $M(\forall y \exists z(y + z = 0))$ es F en M, porque, aplicando la definición de $M(\forall A)$ y la de $M(\exists A)$, $M(i + j = 0)$ es F para i el nombre de $1'$ y j cualquier nombre, porque $1' +_M M(j)$ no es $M(0)$, que es $0'$.

1.4. $\forall y(0 + y = y)$ es válida en M porque es un axioma no lógico.

- Es incorrecta. $\forall y(0 + y = y)$ es válida en M pero no porque sea un axioma no lógico, sino porque toda M–instancia de la misma es verdadera en M.
- Nota: si la afirmación hubiera sido:
  $\forall y(0 + y = y)$ es válida en T porque es un axioma no lógico,
  entonces sí que sería correcta.

1.5. Todo teorema de T es válido en M.

- Es incorrecta.
- $\forall y \exists z(y + z = 0)$ es un teorema de T, por ser axioma, y (según el apartado 1.3) no es válida en M.
- Nota: si la afirmación hubiera sido:
  Todo teorema de T es válido en T,
  entonces sí que sería correcta.